Capítulo 4

DETERMINANTES

Notação:

Sejam A uma matriz de ordem n ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j)$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j.

Exemplo:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad A(3|1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante de uma Matriz

Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n.

Chama-se determinante de A ao número: $\boxed{\det A \text{ ou } |A|}$

- Se $n = 1$, então

$$\boxed{\det A = a_{11}.}$$

- Se $n = 2$, então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

- Se $n = 3$, então $\det A =$ **?**

- Se n =3, então

Regra de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}$$

- Se $n > 1$, então

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i}\det A(1|i). \end{aligned}$$

Exercício1:

Qual o determinante de cada uma das matrizes quadradas?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$0(-1)^{1+1}\det A(1|1) + 1(-1)^{1+2}\det A(1|2) +$$

$$+0(-1)^{1+3}\det A(1|3) + (-1)(-1)^{1+4}\det A(1|4) \ = \mathbf{-3}$$

Teorema de Laplace

Outras formas de cálcular o determinante de um matriz quadrada:

Definição:

Seja A uma matriz de ordem n, com $n \geq 2$. Chamamos **complemento algébrico** do elemento da posição (i, j) de A, e denotamos por $\widehat{A}_{ij}$, ao elemento

$$\boxed{\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).}$$

Exemplo:

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(20+9) = -29,$$

Teorema:

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$, então

1. $\det A = a_{k1}\widehat{A}_{k1} + \ldots + a_{kn}\widehat{A}_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\widehat{A}_{kj}$.
2. $\det A = a_{1k}\widehat{A}_{1k} + \ldots + a_{nk}\widehat{A}_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\widehat{A}_{ik}$.

Cálculo do deteminante usando a k-ésima linha

Cálculo do deteminante usando a k-ésima coluna

Observação:

- A definição de determinante de uma matriz quadrada A é o desenvolvimento do determinante, usando o Teorema de Laplace, através da primeira linha da matriz A.

- Na prática, escolhemos a linha ou a coluna da matriz que tenha maior número de zeros, pois teremos menos parcelas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pela terceira linha temos

$$\begin{aligned} \det A &= 0\widehat{A}_{31} + 0\widehat{A}_{32} + 3\widehat{A}_{33} = 3(-1)^{3+3} \det A(3|3) \\ &= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2-0) = -6 \end{aligned}$$

ou, pela segunda coluna

$$\begin{aligned} \det A &= 0\widehat{A}_{12} - 2\widehat{A}_{22} + 0\widehat{A}_{32} = -2(-1)^{2+2} \det A(2|2) \\ &= -2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -2(3-0) = -6 \end{aligned}$$

Consequência do teorema de Laplace:

1. *Seja A uma matriz de ordem n com uma linha ou uma coluna nula, então* $\det A = 0$.
2. *Seja A uma matriz de ordem n, então* $\det A^T = \det A$.

Proposição:

Seja A uma matriz de ordem n, triangular superior (respectivamente, triangular inferior), então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

Dem:

Determinantes e transformações elementares

O Teorema seguinte mostra as alterações que as transformações elementares nas linhas de uma matriz de ordem n, provocam ao seu determinante.

Teorema:

Seja A uma matriz de ordem n. Então

- *Se B é a matriz que resulta de A multiplicando uma linha de A pelo escalar k,*

$$\boxed{\det B = k \det A.}$$

- *Se B é a matriz que resulta de A trocando duas linhas de A,*

$$\boxed{\det B = -\det A.}$$

- *Se B é a matriz que resulta de A somando um múltiplo de uma linha de A a uma outra,*

$$\boxed{\det B = \det A.}$$

Proposição:

Se C é uma matriz de ordem n com duas linhas iguais, então $\det C = 0$.

> Partindo de uma matriz A, através de transformações elementares, conseguimos obter uma matriz triangular (cujo determinante é o produto dos elementos da diagonal principal), usando o Teorema anterior, temos o determinante da matriz A.

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{l_1 \to \frac{1}{2} l_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{l_2 \to (l_2 - l_1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{l_3 \to (l_3 + l_2)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(-4) = 8$$

Determinantes e matrizes invertíveis

Teorema:

Seja A uma matriz quadrada.

$$A \text{ é invertível se, e só se, } \det A \neq 0.$$

Dem:

Definição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$.
Chamamos **matriz dos complementos algébricos** de A à matriz dos seus complementos algébricos e denotamo-la por $\widehat{A}$.

Definição:

Chamamos **adjunta** de A à matriz transposta da matriz $\widehat{A}$ e denotamo-la por $adj\ A$, isto é,

$$(adj\ A) = \widehat{A}^T.$$

Exercício2: Determinar a matriz dos complementos algébricos e a matriz adjunta de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então

1. $A.adj\ A = (\det A)I_n$.
2. *Se A é invertível, então* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A$.

Exercício3: Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sistemas de Cramer

Definição:

Consideremos um sistema de n equações a n incógnitas, na forma matricial $AX = B$. Se A for invertível, $r(A) = r([A|B]) = n$ e o sistema é possível e determinado, dizemos que temos um **Sistema de Cramer**.

Teorema: (Regra de Cramer)

Seja $AX = B$ um sistema de n equações a n incógnitas, tal que, A é invertível. A única solução do sistema é

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

em que A_j é a matriz que resulta substituindo a j-ésima coluna de A por B.

Exemplo: Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 4 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Porque $\det A = -3 \neq 0$, então A é invertível.
Pelo Teorema,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}4\\0\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix} \end{vmatrix}}{-3} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4\\0\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix} \end{vmatrix}}{-3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix} & \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4\\0\\3\end{matrix}} \end{vmatrix}}{-3} = 1.$$

Determinante do produto de matrizes

Teorema:

Seja E uma matriz elementar de ordem n e A uma matriz de ordem n.

1. *Se E se obtém multiplicando uma linha de I_n por k, então*

$$\det E = k \qquad e \qquad \boxed{\det(EA) = \det E.\det A.}$$

2. *Se E se obtém trocando duas linhas de I_n, então*

$$\det E = -1 \qquad e \qquad \boxed{\det(EA) = \det E.\det A.}$$

3. *Se E se obtém somando um múltiplo de uma linha de I_n a outra linha, então*

$$\det E = 1 \qquad e \qquad \boxed{\det(EA) = \det E.\det A.}$$

Teorema:
Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então,

$$\boxed{\det(AB) = \det A . \det B.}$$

Teorema:
Seja A uma matriz de ordem n. Se A é invertível então

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.}$$

Questão: E o determinante da soma de matrizes igual a soma dos determinantes? Isto é,

det (A+B)=det A+ det B?

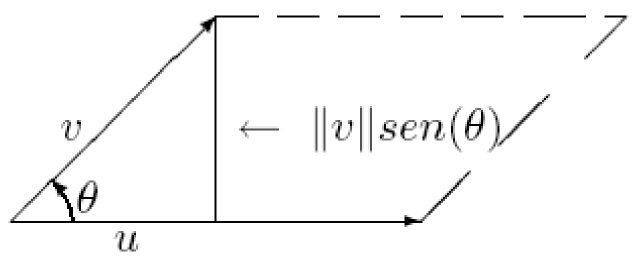
Interpretação geométrica de determinantes 2x2

Proposição:
Se A é uma matriz de ordem 2, então $|\det A|$ é a área do paralelogramo determinado pelos 2 vectores de $\mathbb{R}^2$ que representam as matrizes colunas de A.

Dem. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então os vectores, de $\mathbb{R}^2$ que correspondem às colunas de A, serão

$$u = (a_{11}, a_{21}) \qquad \text{e} \qquad v = (a_{12}, a_{22}).$$

Vamos supor que os vectores não são múltiplos um do outro. Pois caso sejam múltiplos um do outro, então a área do paralelogramo é zero e também $\det A = 0$.



Sabemos que a área do paralelogramo é

$$\boxed{\text{área} \;=\text{base}\times\text{altura} = \|u\|\|v\|sen(\theta)}$$

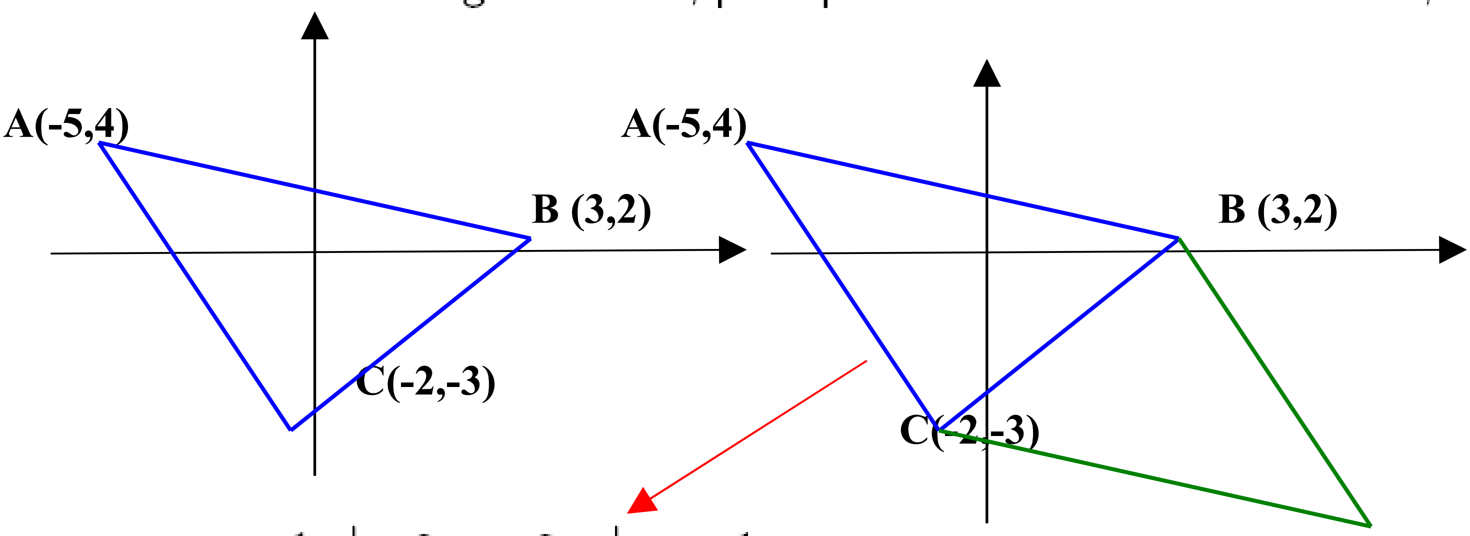
em que θ é o ângulo formado por u e v. Assim,

$$\begin{aligned}
(\text{área})^2 &= \|u\|^2\|v\|^2 sen^2(\theta) = \|u\|^2\|v\|^2(1-cos^2(\theta))\\
&= (\|u\|^2\|v\|^2) - (\|u\|^2\|v\|^2 cos^2(\theta))\\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2\\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2\\
&= a_{11}^2a_{22}^2 + a_{21}^2a_{12}^2 - 2(a_{11}a_{12})(a_{21}a_{22})\\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2\\
&= (\det A)^2.
\end{aligned}$$

Donde, $|\det A|$ =área. ■

Exemplo:

A área do triângulo de vértices $A = (-5,4)$, $B = (3,2)$, $C = (-2,-3)$ pode ser calculada tendo em conta que $\overrightarrow{AB} = (8,-2)$ e $\overrightarrow{AC} = (3,-7)$ formam 2 lados do triângulo. Assim, pelo que mencionámos anteriormente,



$$\text{área} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-56+6| = 25.$$

Produto externo e misto de vectores de R^3

Definição:
Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por **produto externo** (ou produto vectorial) de u por v e denota-se por $u \times v$, o vector de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boxed{u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).}$$

Obs: "Mnemónica"

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
Qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de e_1, e_2, e_3.
Por exemplo: $(4, 3, -2) = 4e_1 + 3e_2 - 2e_3$.

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício4: Determine o produto externo dos vectores

$$u = (1, 0, 2), \ v = (0, -1, 0)$$

Das propriedades dos determinates conclui-se:

Proposição:

Sejam u, v, t vectores de $\mathbb{R}^3$ *e* α *um escalar. Então:*

1. $u \times v = -(v \times u)$
2. $\boxed{(u \times v)|u = (u \times v)|v = 0}$
3. $\alpha(u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$
4. $(u + v) \times t = (u \times t) + (v \times t)$
5. $t \times (u + v) = (t \times u) + (t \times v)$

Proposição:

Sejam u e v vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ *e seja* θ *o ângulo formado por u e v.*
$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen(\theta)$ = *área do paralelogramo de lados adjacentes u e v.*

Dem. Como $0 \leq \theta \leq \pi$ vem que $sen(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u\|\|v\| sen(\theta) &= \|u\|\|v\|\sqrt{1 - cos^2(\theta)} = \|u\|\|v\|\sqrt{1 - \frac{(u|v)^2}{\|u\|^2\|v\|^2}} \\
&= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2} \\
&= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)} \\
&= \sqrt{(u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\
&= \|u \times v\|.
\end{aligned}$$

Exemplo:

A área do triângulo de $\mathbb{R}^3$ de vértices $P_1 = (2, 2, 0)$, $P_2 = (-1, 0, 2)$, $P_3 = (0, 4, 3)$ é metade da área do paralelogramo de lados adjacentes $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$.

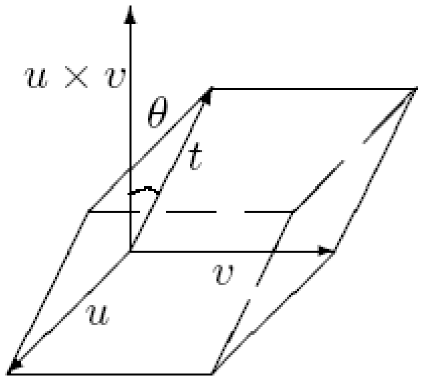
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10e_1 + 5e_2 - 10e_3 = (-10, 5, -10)$$

vem que a área do triângulo é

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 25 + 100} = \frac{15}{2}.$$

Volúmes de paralelepípedos

Dados 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ com o mesmo ponto inicial e direcções distintas, u, v, t, estes definem um paralelepípedo P.



O seu volume é dado por

$\boxed{\text{Vol(P)= Área da Base x alura(h)}}$, Área da Báse= $\|u \times v\|$

h=**?**

$$\left.\begin{array}{l} u \times v \text{ é perpendicular a } u \text{ e a } v \\ \theta \text{ o ângulo formado pelos vectores } u \times v \text{ e } t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; h = \|t\| |cos(\theta)|$$

Conclusão:

$$\boxed{\text{Vol(P)= } \|u \times v\| \|t\| |cos(\theta)| = |\|u \times v\| \|t\| cos(\theta)| = |(u \times v)|t|}$$

Definição:

Dados 3 vectores u, v, t de $\mathbb{R}^3$, chamamos **produto misto** dos vectores u, v e t ao número real

$$(u \times v)|t.$$

Obs: "Mnemónica"

se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $t = (t_1, t_2, t_3)$

$$
\begin{aligned}
(u \times v)|t &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) |(t_1, t_2, t_3) \\
&= t_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - t_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + t_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Determine k por forma a que o paralelepípedo de lados $u = (2, k, 2)$, $v = (0, 4, -2)$, $t = (5, -4, 0)$ tenha volume igual a 4.

Ora,

$$
\begin{aligned}
|(u \times v)|t| &= \left| \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & k & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \right| \\
&= |-10k - 40 - 16| = |-10k - 56| = 4,
\end{aligned}
$$

então,

$$-(-10k - 56) = 4 \qquad \text{ou} \qquad (-10k - 56) = 4.$$

Donde,

$$k = -5.2 \qquad \text{ou} \qquad k = -6.$$

Valores Próprios e Vectores Proprios de uma Matriz

Definição:

Sejam A uma matriz de ordem n e λ um escalar:

1. λ diz-se um **valor próprio** de A, se existir uma matriz coluna X, $n \times 1$, não nula, tal que $AX = \lambda X$.

2. Se λ é um valor próprio de A, cada matriz coluna, não nula, X, tal que $AX = \lambda X$ é denominada **vector próprio** de A associado a λ.

Exemplo:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}^{\text{Vector proprio associado a 2}} = \underbrace{2}_{\text{Valor Próprio}} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Como Determinar os Valores Próprios de uma Matriz?

λ será valor próprio da Matriz A se a equação

$$AX = \lambda X$$

tiver soluções não núlas, ou equivalentemente, se o sistema

$$\underbrace{(\lambda I_n - A)}_{B} X = 0 \qquad \text{(BX=0, sistema homogéneo)}$$

for possível e indeterminado. Assim a matriz do sistema tem de ser não invertível, ou seja,

$$\boxed{\det(\lambda I_n - A) = 0.}$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem n.
Chama-se **polinómio característico** de A ao polinómio

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Proposição:
Sejam A uma matriz de ordem n e λ um escalar. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. *λ é valor próprio de A.*
2. $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
3. *λ é raíz do polinómio característico de A.*
4. *O sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)X = 0$ é possível e indeterminado.*

Exercício5: Determinar os valores próprios de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Definição:
Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A, designamos por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α e denotamos por

$$ma(\alpha),$$

o número de vezes que α aparece como raíz de $p_A(\lambda)$ (polinómio característico de A).

Obs: $p_A(\lambda)$ é polinómio de grau n. Logo tem n raízes (reais ou complexas, eventualmente algumas repetem-se). Se

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

forem os valores próprios distintos então

$$ma(\alpha_1) + ma(\alpha_2) + \ldots + ma(\alpha_s) = \text{ordem de } A = n.$$

Definição:

Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A. Chamamos **subespaço próprio** de A associado ao valor próprio α ao conjunto solução do sistema homogéneo

$$(\alpha I_n - A)X = 0.$$

Este conjunto é denotado por M_α.

$$\boxed{M_\alpha = \{X \in \mathbb{R}^n : (\alpha I_n - A)X = 0\}}$$

Exercício6: Determine os valores próprios e os respectivos subespaços próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício7: Determine os valores próprios e os respectivos subespaços próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$